

Verifizierung des Programmes ModTherm (numerische Lösung) durch ein mathematisch-analytisches Lösungsverfahren anhand EWS-Analytics

Ziel der Verifizierung ist es, anhand von zwei verschiedenen Beispielen einer typischen Anwendung die Exaktheit der numerischen Lösung, ermittelt anhand der Software ModTherm, mittels der mathematisch-analytischen Lösung durch die Software EWS-Analytics zu überprüfen.

Es werden die Sondentypen Koaxial- bzw. einer einfach U-Rohrsonde mit jeweils variierenden Wärmeleitfähigkeiten des Verfüllbaustoffes betrachtet. Im Detail sind die Beispiele durch folgende Parameter beschreiben:

Parameter	Allgemein	
	Koaxialsonde	Einfache U-Rohrsonde
Betriebsstunden pro Jahr	8760 (kontinuierlicher Betrieb)	
Zirkulationsmedium	Wasser, ohne Ethanol	
System-Temperatur (Injektionstemperatur)	0 °C	
Zirkulationsrate des Wasserkreislaufes	1 l/s	
Tiefe der EWS	100 m	
Geothermischer Gradient	0,03 °C/m	
Bohrlochdurchmesser	160 mm	
Außendurchmesser Zementiertes Rohr (Verdampferrohr)/ Wanddicke	100 mm / 3.5 mm	
Außendurchmesser "inneres" Wasserrohr / Wanddicke	42 mm/ 3,6 mm	32 mm / 2.6 mm
Totale Porosität des Gesteins	0 %	
Gesteinsdichte	2600 kg/m ³	
spez. Wärmekapazität Gestein	850 J/(kg K)	
Wärmeleitfähigkeit Gestein	2,1 W/(m K)	
Dichte des wassergesättigten Gesteins	2600 kg/m ³	
Zentralrohr oder U-Rohr- Material/ Dichte/ sp. Wärme/ W.-Leitf.	PE / 920 kg/m ³ / 1800 J/(kg K) / 0,42 W/(m K)	PE/ 920 kg/m ³ / 1800 J/(kg K) / 0,42 W/(m K)
Andere Rohre Material/ Dichte/ sp. Wärme/ W.-Leitf.	Stahl-glatt / 7800 kg/m ³ / 465 J/(kg K) / 52 W/(m K)	
Material der Verfüllung / Dichte/ sp. Wärme/ W.-Leitf.	Zement / 1600 kg/m ³ / 660 J/(kg K) / 0,8 W/(m K) bzw. 2,1 W/ (m K)	Zement / 1600 kg/m ³ / 660 J/(kg K) / 0,8 W/(m K) bzw. 2,1 W/ (m K)

Die Zirkulationsrate wurde bewusst sehr hoch angenommen, um den Einfluss der Wärmeübergangszahlen zu minimieren. Diese müssen in der analytischen Lösung als konstant angenommen werden, in der numerischen Lösung aber veränderlich in jeder Schicht.

Ergebnisse

Geothermische Leistung

Die Ergebnisse zeigen, dass für den Vergleich die geothermischen Leistungen der Koaxialsonde (k) eine nahezu identische Lösung für beide Lösungsverfahren, numerisch wie mathematisch-analytisch, erreicht wird (Abbildung 1: Darstellung der geothermischen Leistung [kW] über der Zeit in Tagen als Ergebnisse der analytischen (ewsa) wie numerischen (mod) Berechnung für eine Koaxialsonde (k) mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten des Verfüllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K). Dabei hat der Verfüllbaustoff in seiner Wärmeleitfähigkeit insofern Einfluss, dass die geothermische Leistung für eine Wärmeleitfähigkeit WLF = 2,1 W/m K des Verfüllmaterials um einiges höher ist als für eine WLF von 0,8 W/m K. Hingegen unterscheiden sich die Lösungen beider Verfahren für eine einfache U-Rohrsonden (u) um etwa 10 %, wobei dieses für beide WLF des Verfüllmaterials zutrifft (Abbildung 2).

Die Lösung von ModTherm kann demnach durch das analytische Verfahren von EWS-Analytics recht gut bestätigt werden.

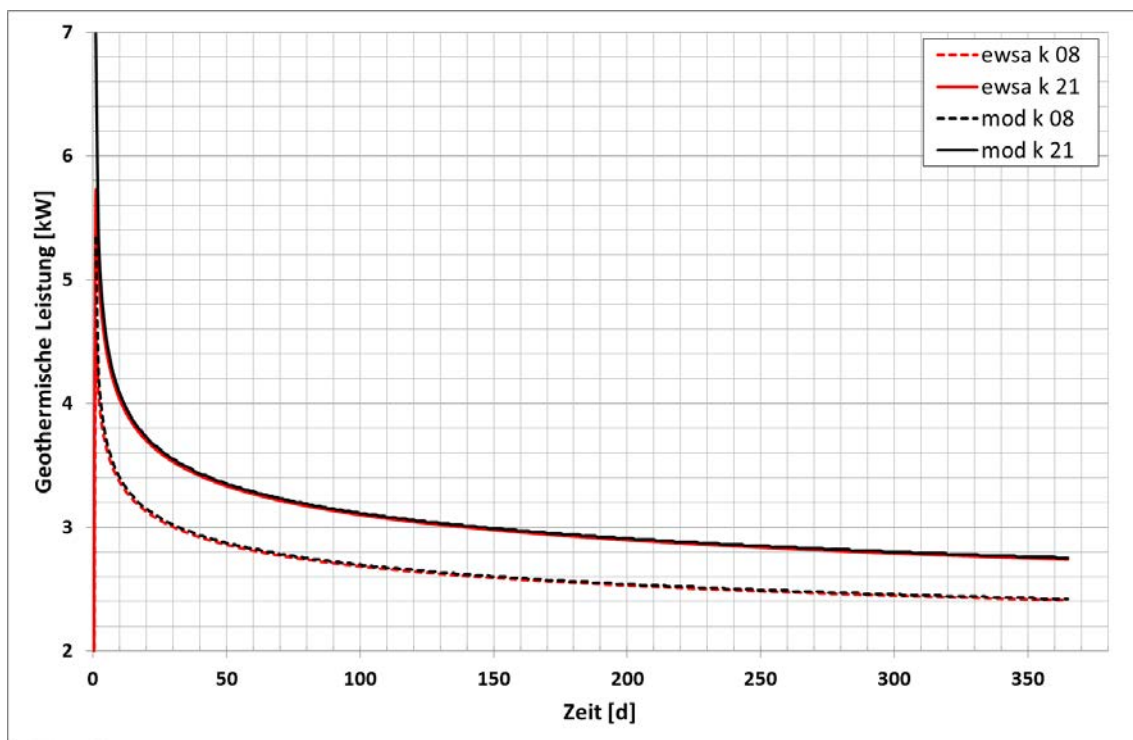


Abbildung 1: Darstellung der geothermischen Leistung [kW] über der Zeit in Tagen als Ergebnisse der analytischen (ewsa) wie numerischen (mod) Berechnung für eine Koaxialsonde (k) mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten des Verfüllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

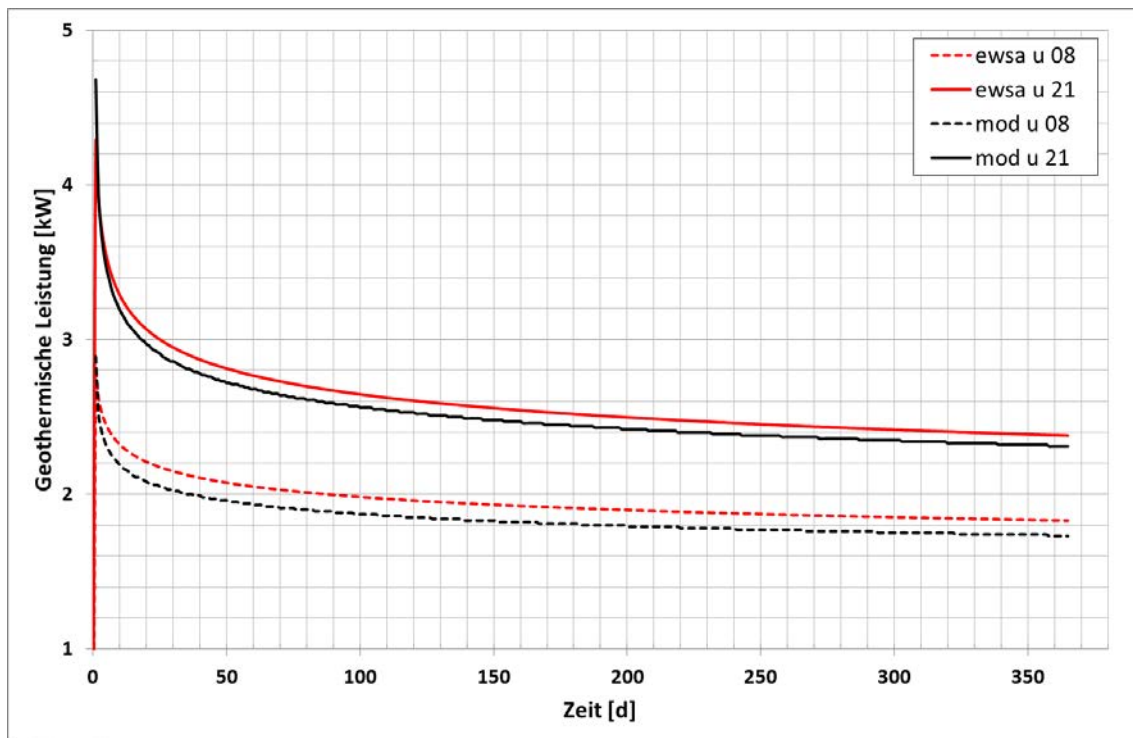


Abbildung 2: Darstellung der geothermischen Leistung [kW] über der Zeit in Tagen als Ergebnisse der analytischen (ewsa) wie numerischen (mod) Berechnung für eine einfache U-Rohrsonde (u) mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten des Verfüllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

Um eine Übertragung der Ergebnisse zu ermöglichen, sind diese im Folgenden in dimensionsloser Form aufgeführt (Abbildung 3, Abbildung 4). Die Umrechnung erfolgt entsprechend den angeführten Formeln, wobei zu beachten ist, dass die Daten in SI-Basiseinheiten gegeben sind.

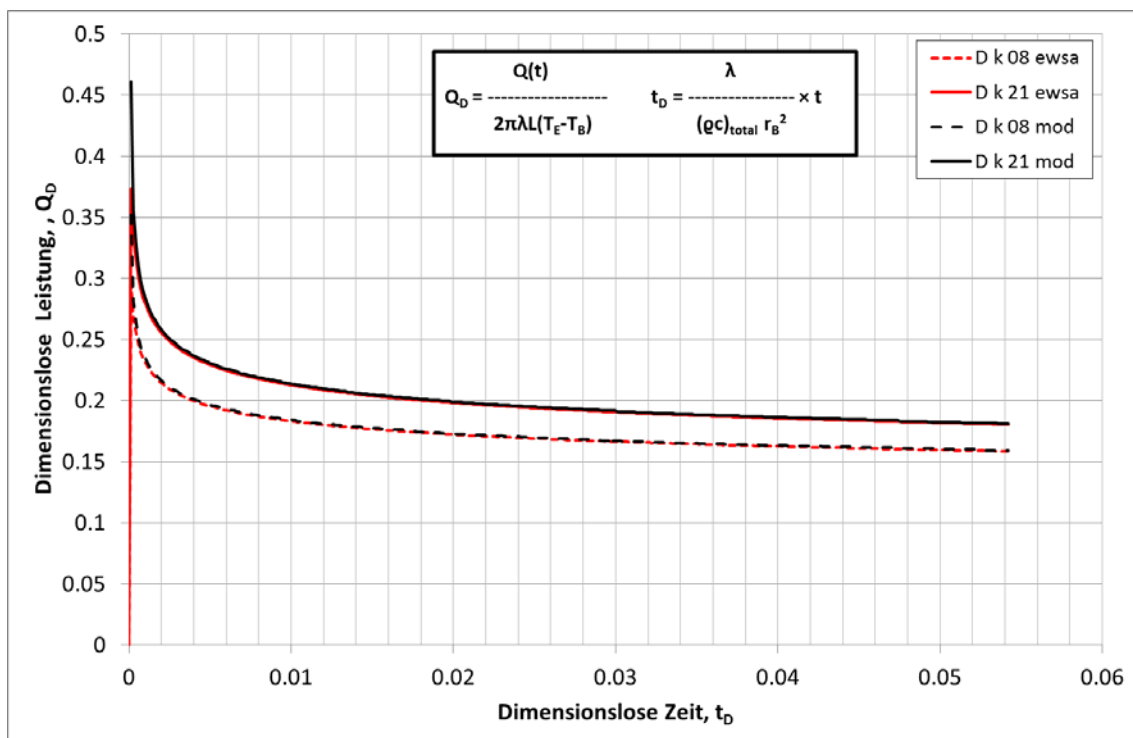


Abbildung 3: Darstellung der dimensionslosen Leistung Q_D über der dimensionslosen Zeit t_D als Ergebnisse der analytischen (ewsa) wie numerischen (mod) Berechnung für eine Koaxialsonde (k) mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten des Verfüllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

Auch in den Darstellungen der dimensionsloser Leistung/ Zeit sind die Unterschiede in den Übereinstimmungen zwischen einfach U-Rohr (Abbildung 4) und Koaxialsonden (Abbildung 3) ersichtlich.

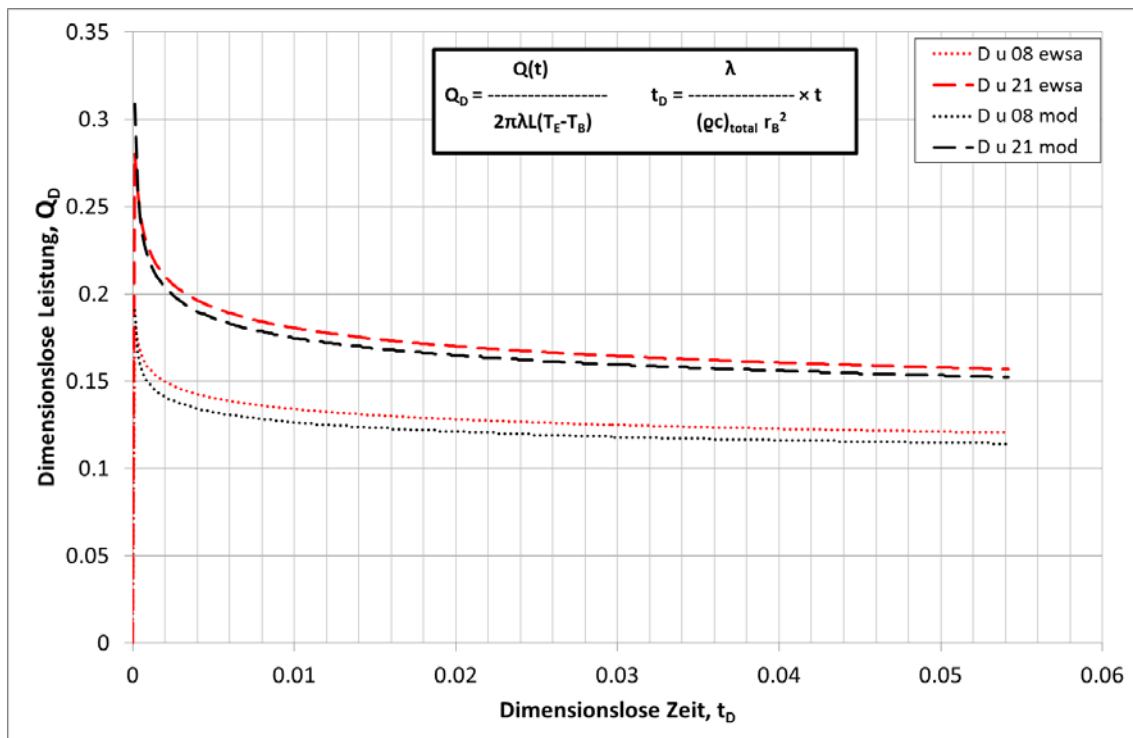


Abbildung 4: Darstellung der dimensionslosen Leistung Q_D über der dimensionslosen Zeit t_D als Ergebnisse der analytischen (ewsa) wie numerischen (mod) Berechnung für eine einfache U-Rohr-Sonde (u) mit verschiedenen Wärmeleitfähigkeiten des Verfüllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

Temperatur

Nachfolgend sind die Ergebnisse der Berechnungen zu den Temperaturverläufen in den beiden Rohren, absteigendes (inj) wie aufsteigendes (aus), über der Tiefe dargestellt. Wiederum ist zu beobachten, dass für die Koaxialsonde (Abbildung 5) die Ergebnisse der numerischen Lösung (ModTherm) durch die der analytischen Lösung (EWS-Analytics) gut bestätigt werden. Dies gilt so auch für die einfache U-Rohrsonde, wobei die Übereinstimmung hier für die Lösungen bei einer WLF von 2,1 W/m K deutlich besser sind (Abbildung 6).

Der Temperaturverlauf im Injektionsrohr verläuft geradlinig ansteigend (Abbildung 5, Abbildung 6), wobei die Temperaturerhöhung für die Koaxialsonde größer ist. Deutlich wird die Auswirkung des thermischen Kurzschlusses zwischen absteigendem und aufsteigendem Rohr. Die Temperatur im aufsteigenden Ast bei der Koaxialsonde verringert sich wieder um ca. 0,4 K, d.h. Wärme wird an die Umgebung abgegeben (in diesem Fall an das Injektionsrohr), wohingegen sich die Temperatur im aufsteigenden Rohr der einfach U-Rohrsonde weiterhin erhöht (um rund 2 K), d.h. weiterhin Aufnahme von Umgebungswärme.

Sind die Verläufe für die Koaxialsonde nahezu synchron, verschoben um ca. 0,015 K, stellen sich diese für die einfach U-Rohrsonde verschieden dar. Am Sondenfuß ist ein größerer Unterschied (0,04 K) für die WLF von 0,8 W/m K zwischen numerischer und analytischer Lösung erkennbar.

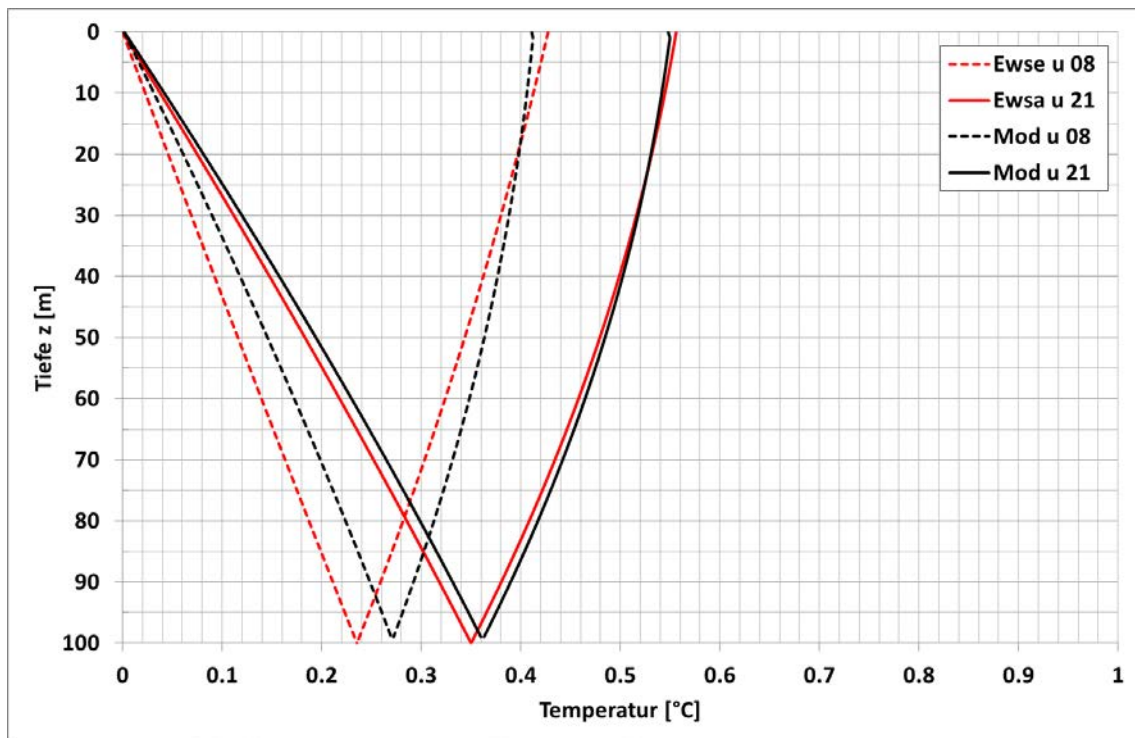


Abbildung 5: Darstellung des Temperaturverlaufs [°C] über der Tiefe als Ergebnisse der mathematisch-analytischen (Ewsa) wie numerischen (Mod) Berechnung für eine Koaxialsonde (k) mit verschiedenen WLF des Füllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

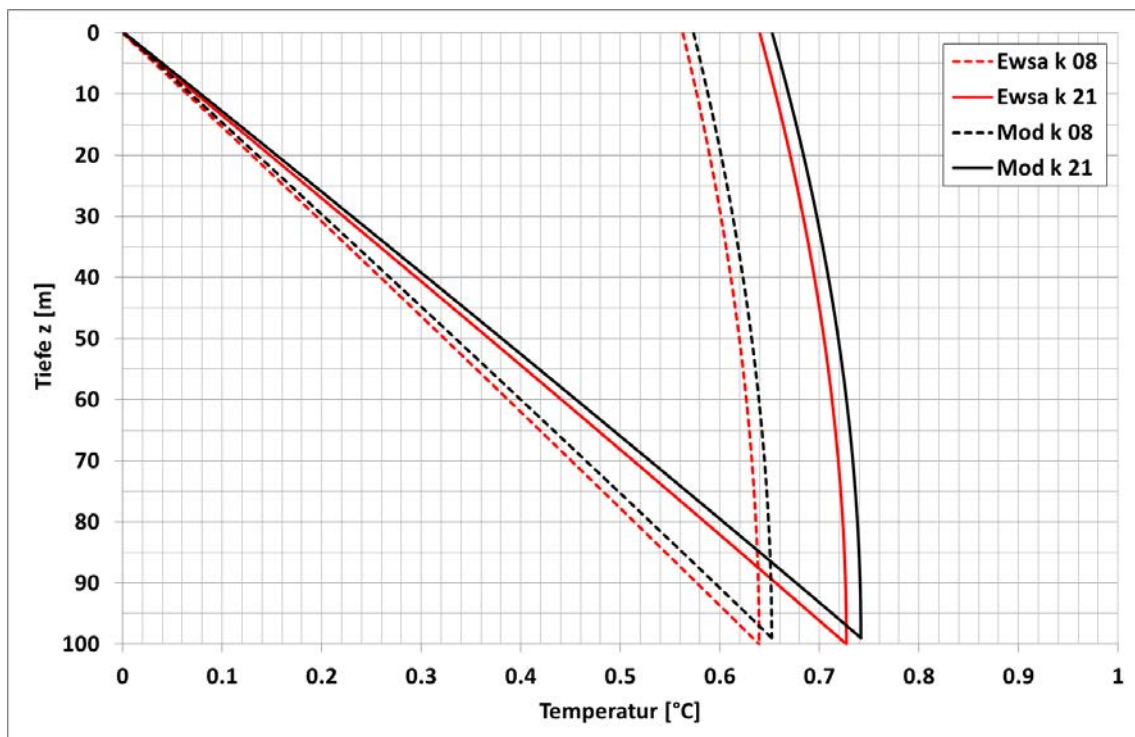


Abbildung 6: Darstellung des Temperaturverlaufs [°C] in den beiden Rohren über der Tiefe als Ergebnisse der mathematisch-analytischen (Ewsa) wie numerischen (Mod) Berechnung für eine einfache U-Rohrsonde (u) mit verschiedenen WLF des Füllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

Selbiges ist gilt auch für die dimensionslosen Darstellungen (Abbildung 7, Abbildung 8)

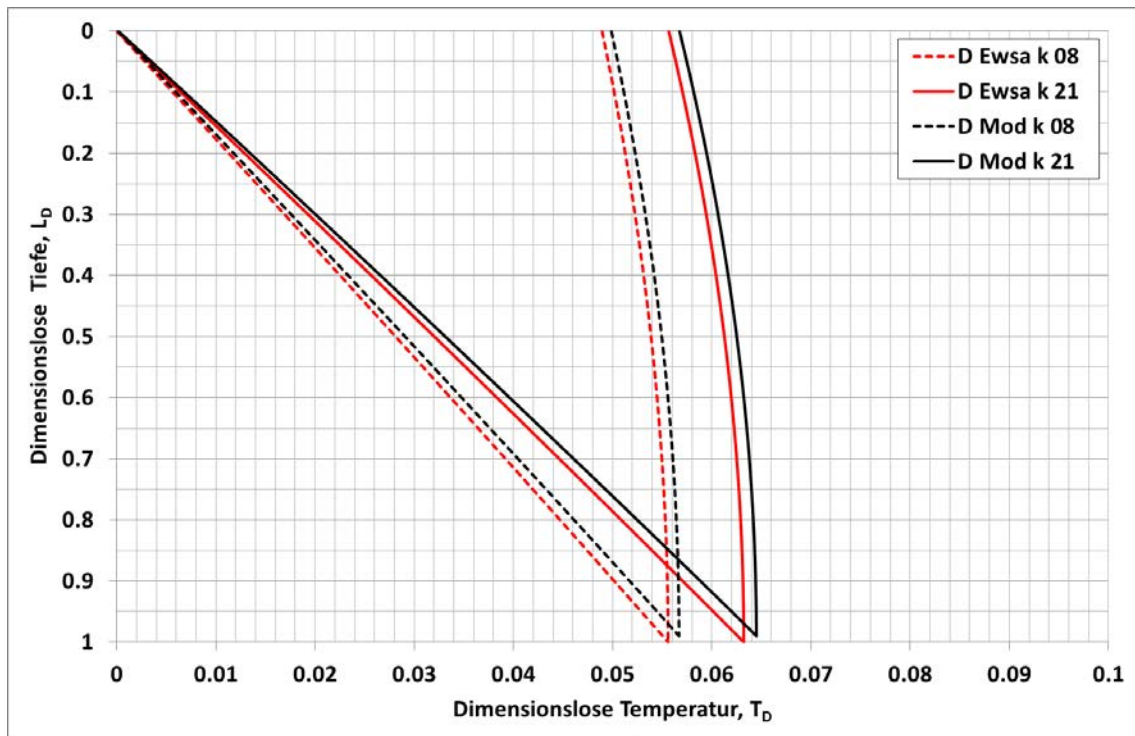


Abbildung 7: Darstellung des dimensionslosen Temperaturverlaufs T_D über der dimensionslosen Tiefe L_D als Ergebnisse der mathematisch-analytischen (Ewsa) wie numerischen (Mod) Berechnung für eine Koaxialsonde (k) mit verschiedenen WLF des Füllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

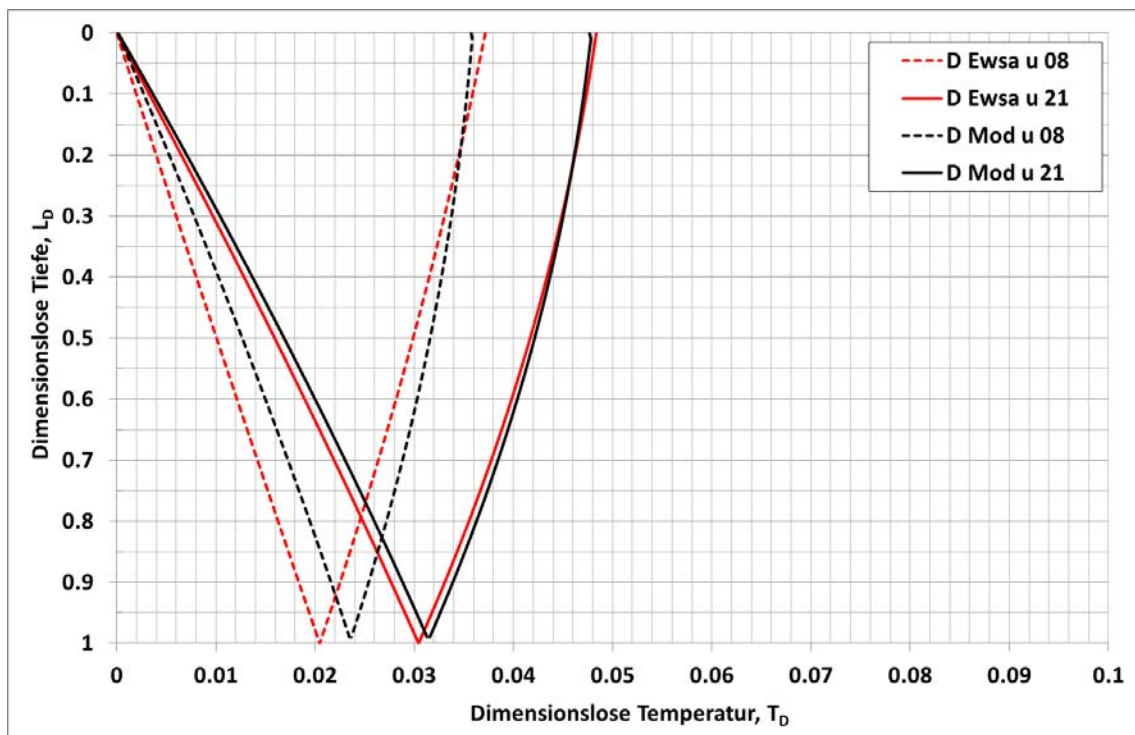


Abbildung 8: Darstellung des dimensionslosen Temperaturverlaufs T_D über der dimensionslosen Tiefe L_D als Ergebnisse der mathematisch-analytischen (Ewsa) wie numerischen (Mod) Berechnung für eine einfache U-Rohrsonde (u) mit verschiedenen WLF des Füllbaustoffes (0,8 bzw. 2,1 W/m K)

Diskussion

Analytische Lösungen sind nur für homogene Modellvorstellungen ableitbar, d.h. für Räume mit konstanten Eigenschaften (Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärmekapazität u.a.). Die analytische Lösung für die Koaxialsonde ist exakt. Eine Koaxialsonde entspricht in ihrer namensgebenden koaxialen Bauweise dem zylindersymmetrischen System, welches der Berechnung zugrunde liegt. Die Bohrlochachse entspricht dabei $r=0$. Der Wärmeübergang lässt sich somit leicht berechnen.

Dies trifft für die U-Rohrsonde nicht zu. Deren Bauweise ist in Schenkeln absteigender und aufsteigender Rohre angelegt, die Anordnung ist nicht konzentrisch. Der Verfüllbaustoff zwischen den Rohren stellt dabei die Mitte dar, in diesen strömt die Wärme aus dem Erdreich und von da aus geht diese in die Rohre über (inj) oder auch nicht (aus).

Deshalb erfordert die U-Rohrlösung einschneidende Näherungen in folgender Art:

- Der Wärmezustrom zu jedem Ast des U-Rohres ist gleich und wird durch den Mittelwert der Aussentemperaturen $(T_1+T_2)/2$ bestimmt.
- Der Kurzschluss-Wärmestrom zwischen den Ästen wird mit einem stationären Ansatz erfasst ($Q=k (T_1-T_2)$), wobei k die Leitfähigkeit ist. Die Leitfähigkeit kann nur näherungsweise radialsymmetrisch (mit einer Korrektur nach dem Verfahren von GLÜCK) berechnet werden, deshalb ist die Genauigkeit der analytischen Lösung begrenzt.

Im Ergebnis gilt:

- Die Verifizierung zeigt, dass das numerische Programm ModTherm das Problem richtig widerspiegelt.
- Der Vergleich mit der exakten analytischen Lösung für die Koaxialsonde belegt die Genauigkeit.
- Beim Vergleich der Leistungen bei der U-Rohrlösung ist die Genauigkeit ausreichend. Die Temperaturen über der Tiefe der analytischen Lösung sind näherungsbehaftet. Hier hat die numerische Lösung die bessere Genauigkeit.

Abkürzungen:

WLF	Wärmeleitfähigkeit
Q_D	Dimensionslose Leistung
$Q(t)$	Zeitabhängige Leistung
π	3,1415
L	Länge der Sonde
T_E	Temperatur im Erdreich
T_B	Temperatur im Bohrloch
λ	Wärmeleitfähigkeit
t_D	Dimensionslose Zeit
t	Zeit
δ	Dichte
c	Wärmekapazität
r_B	Radius Bohrloch